

# **UKPSC FRO (Mains)**

**Previous Year Paper  
(Mathematics)  
29 Dec 2022**

# Test Prime

ALL EXAMS,  
ONE SUBSCRIPTION



**70,000+**  
Mock Tests



Personalised  
Report Card



Unlimited  
Re-Attempt



**600+**  
Exam Covered



Previous Year  
Papers



**500%**  
Refund



**ATTEMPT FREE MOCK NOW**



No. of Printed Pages : 4

RFU-16

2022

गणित

## MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घण्टे]

[ पूर्णांक : 200

Time allowed : Three Hours]

[Maximum Marks : 200

- नोट :
- इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड 'अ' तथा 'ब' हैं। प्रत्येक खण्ड में चार प्रश्न हैं। किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए, प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्न अवश्य होने चाहियें।
  - सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
  - एक प्रश्न के सभी भागों का उत्तर अनिवार्यतः एक साथ दिया जाय।
  - केवल नॉन-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर अनुमत्य है।

- Note :
- This question paper consists of two sections 'A' and 'B'. Each section has four questions, attempt any five questions. At least two questions should be from each section.
  - All questions carry equal marks.
  - All the parts of the same question must be answered together.
  - Only Non-programmable calculator is allowed.

खण्ड - 'अ'

Section - 'A'

- (अ) रेखा  $\frac{A}{r} = B \cos \theta + C \sin \theta$  के शांकव  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध निकालिए। 20
- (ब) एक समतल, एक बिन्दु (a, b, c) से होकर जाता है और अक्षों को A, B, C पर क्रमशः काटता है। सिद्ध कीजिए कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दुपथ  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$  है, जहाँ O मूल बिन्दु है। 20



RFU-16

1

[P.T.O.]

(a) Find the condition that the line  $\frac{A}{r} = B \cos \theta + C \sin \theta$  touches the conic

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

(b) A plane passes through a point  $(a, b, c)$  and cuts the axes in the points  $A, B, C$ , respectively. Prove that the locus of the centre of the sphere  $OABC$  is  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ , where  $O$  is the origin.

2. (अ) रैखिक प्रतिचित्रण  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , जो  $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$  से परिभाषित है, का परास एवं अष्टि ज्ञात कीजिए। क्या आप एक ऐसा रैखिक प्रतिचित्रण  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  लिख सकते हैं, जिसके लिए परास  $(T) =$  अष्टि  $(T)$  हो? 20

(ब) वृत्त  $x^2 + y^2 = 64a^2$  तथा परवलय  $y^2 = 12ax$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यहाँ 'a' एक वास्तविक संख्या है। 20

(a) Find the range and Kernel of the linear map  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined by  $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ .

Can you write a linear map  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  such that  $\text{Range}(T) = \text{Ker}(T)$ ?

(b) Find the area bounded by the circle  $x^2 + y^2 = 64a^2$  and the parabola  $y^2 = 12ax$ , here 'a' is a real number.

3. (अ) अवकल समीकरण  $(D^2 + 2D + 1)y = x \sin x$  का हल ज्ञात कीजिए, जहाँ पर  $D \equiv \frac{d}{dx}$  है। 20

(ब) यदि  $\Gamma_{jk}^i$ , मीट्रिक प्रदिश  $g_{ij}$  के लिए क्रिस्टोफल का द्वितीय चिह्न हो तो दिखाइए कि 20

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} (\log \sqrt{g})$$

जहाँ  $g$  प्रदिश  $g_{ij}$  के सारणिक का मान है।

(a) Solve the differential equation

$$(D^2 + 2D + 1)y = x \sin x, \text{ where } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

(b) If  $\Gamma_{jk}^i$  is the Christoffel symbol of second kind for the metric tensor  $g_{ij}$ , then

$$\text{show that } \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} (\log \sqrt{g})$$

Where  $g$  is the value of the determinant of the tensor  $g_{ij}$ .

4. (अ)  $2a$  भुजा वाला एक वर्ग, जिसकी सतह उर्ध्वाधर है, एक वही क्षैतिज रेखा पर स्थित दो चिकनी खूटियों, जिनके बीच की दूरी  $C$  है, पर स्थित है। दिखाइए कि सन्तुलन की अवस्था में इसका एक किनारा क्षैतिज से या तो  $45^\circ$  झुकाव पर है या  $\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{a^2 - c^2}{c^2} \right)$  के झुकाव पर। 20

- (ब) स्टोक्स के प्रमेय का प्रयोग करते हुए  $\int_C (xydx + xy^2dy)$  को हल कीजिए; जहाँ  $C$  शीर्षों  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$  वाला सकारात्मोन्मुखी वर्ग है। 20

- (a) A square of side  $2a$  is placed with its plane vertical between two smooth pegs which are in the same horizontal line and at a distance  $C$ . Show that it will be in equilibrium when the inclination of one of its edges to the horizon is either  $45^\circ$  or  $\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{a^2 - c^2}{c^2} \right)$ .

- (b) Evaluate  $\int_C (xydx + xy^2dy)$  using Stokes theorem, where  $C$  is the positively oriented square with vertices  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ .

खण्ड - 'ब'

Section - 'B'

5. (अ) दिखाइए कि  $n$ -कोटि का प्रत्येक परिमित समूह  $n$ -चिह्नों वाले एक क्रमचय समूह के तुल्याकारी है। एक वर्ग के ऑक्टिक समूह के तुल्याकारी एक क्रमचय समूह को भी प्राप्त कीजिए। 20
- (ब) मिथ्या स्थिति विधि से समीकरण  $x^2 - 2 = 0$  के धनात्मक मूल का मान दशमलव के दो स्थानों तक शुद्धतम प्राप्त कीजिए। इसके अभिसरण की कोटि क्या है? 20
- (a) Show that every finite group of order  $n$  is isomorphic to a permutation group on  $n$ -symbols. Also find a permutation group isomorphic to the octic group of a square.
- (b) Find the positive root of the equation  $x^2 - 2 = 0$ , correct to two places after decimal using Regula-Falsi method. What is its order of convergence?
6. (अ) दिखाइए कि एक संहत समुच्चय पर परिभाषित सतत फलन, एक समान सतत है।  $\mathbb{R}$  के एक परिबद्ध उपसमुच्चय पर परिभाषित एक सतत फलन का उदाहरण दीजिए जो एक समान सतत न हो। 20
- (ब) आंशिक अवकल समीकरण  $(D^2 + 2DD' + D'^2)z = e^{2x+3y}$  को हल कीजिए, जहाँ  $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  तथा  $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$  है। 20

(a) Show that a continuous function defined on a compact set is uniformly continuous. Give an example of a continuous function defined on a bounded subset of  $\mathbb{R}$ , which is not uniformly continuous.

(b) Solve the partial differential equation

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)z = e^{2x+3y}$$

Where  $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  and  $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$

7. (अ) यदि  $f(t)$  पूरे सम्मिश्र तल में एक वैश्लेषिक फलन हो जो असमानता  $|f(t)| \leq A|t|^k$  को सन्तुष्ट करता हो, जहाँ  $A$  और  $K$  धनात्मक अचर हों तो दिखाइए कि  $f(t)$  एक ऐसा बहुपद है जिसकी घात  $k$  से अधिक नहीं हो सकती है। 20

(ब) फलनों के अनुक्रम  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , जो  $f_n(x) = x^n$  से परिभाषित है, के एक समान सांतत्य की व्याख्या कीजिए। इसकी मदद से या अन्य तरीके से श्रेणी  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  के फलन  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  पर

अन्तराल  $[0, 1)$  के लिए एक समान अभिसरित होने की जाँच कीजिए। 20

(a) If  $f(t)$  be an analytic function in the whole complex plane and satisfying the inequality  $|f(t)| \leq A|t|^k$ , where  $A$  and  $K$  are positive constants, then show that  $f(t)$  is a polynomial of degree not exceeding  $K$ .

(b) Discuss the uniform convergence of the sequence of functions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  given by  $f_n(x) = x^n$ . Hence or otherwise check whether the series  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

converges uniformly to the function  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  on  $[0, 1)$  or not.

8. (अ) वक्र  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  को  $x$ -अक्ष के परितः घूर्णन से घिरे ठोस का जड़त्व आघूर्ण  $x$ -अक्ष के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि  $a$  व  $b$  धनात्मक अचर हैं। 20

(ब) किसी द्रव्य के द्विविमीय गति का वर्णन कीजिए यदि बिन्दु  $(0, 0)$  पर सामर्थ्य  $m$  का एक स्रोत तथा बिन्दुओं  $(1, 0)$  तथा  $(-1, 0)$  पर समान सामर्थ्य के अभिगम हों। प्रवाह रेखाओं को भी खींचिए। 20

(a) Find the moment of inertia about  $x$ -axis of the solid obtained by revolving  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  about  $x$ -axis,  $a$  and  $b$  being positive constants.

(b) Discuss the two dimensional motion of a fluid having a source of strength  $m$  at  $(0, 0)$  and equal sinks at  $(1, 0)$  and  $(-1, 0)$ . Also draw the stream lines.