Adda247 UPSC

Subject Code : QDB-38

ગણિતશાસ્ત્ર (મુખ્ય પરીક્ષા)

(Gujarati Medium)

સમય : 3 કલાક **કુલ ગુણ : 200**

સૂચના : (1) પ્રશ્નપત્ર **A, B** અને **C** વિભાગમાં છે, પ્રત્યેક વિભાગમાં લખવાના પ્રશ્નો તથા તેના ગુણ આપવામાં આવેલ છે.

(2) પ્રત્યેક વિભાગમાં પ્રશ્નોના જવાબ એક સાથે – સળંગ ક્રમવાર જવાબવહીમાં લખવાના રહેશે. તેમજ એક વિભાગના પ્રશ્નોના જવાબ સાથે બીજા વિભાગના પ્રશ્નોના જવાબ લખવા નહીં. જો આ રીતે એક વિભાગના પ્રશ્નોના જવાબ સાથે બીજા વિભાગના પ્રશ્નોના જવાબ લખેલા હશે તો તે તપાસવામાં આવશે નહીં.

(3) વિભાગ **A**, **B** અને **C** માં ના પ્રશ્નોના જવાબ નિર્ધારિત શબ્દોમાં લખવા.

(4) જો અંગ્રેજી ભાષામાં આપવામાં આવેલ પ્રશ્નો અને તેના ગુજરાતી અનુવાદમાં તફાવત જણાય તો, અંગ્રેજી ભાષાનો પ્રશ્ન તે માટે માન્ય ગણવાનો રહેશે.

(5) ઉત્તર અંગ્રેજી અથવા ગુજરાતી બે પૈકી આપે વિકલ્પ આપેલ એક જ ભાષામાં લખવાના રહેશે. બંને ભાષામાં જવાબો એક સાથે લખી શકાશે નહીં.

વિભાગ-A

સૂચના : (1) પ્રશ્ન ક્રમાંક : **1** થી **20**.

(2) બધા જ **20** પ્રશ્નોના જવાબો લખવાના છે.

(3) દરેક પ્રશ્નના **2** ગુણ છે.

(4) જવાબ આશરે **20** થી **30** શબ્દોમાં લખવા.

1. ક્રમચય $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ નું ફેરબદલીમાં (transpositions) વિઘટન કરો.

2. સાબિત કરો કે જો કોઈ સમૂહ Gના પ્રત્યેક સભ્ય a માટે $a^2 = e$ હોય તો, G એ આબેલીય સમૂહ (Abelian group) છે.

3. સાબિત કરો કે એકમ ઘટક (unity) સાથેના પૂર્ણ પ્રદેશના સ્વયંઘાતી ઘટકો (idempotent elements) ફક્ત 0 અને 1 છે.

4. જો U એ મંડળ Rનું ઈષ્ટમંડળ હોય. 1 એ Rનો એકમઘટક (unity) હોય અને $1 \in U$, તો સાબિત કરો કે $U = R$.

5. $\mathbb{R}^3$ના ઉપાવકાશ $W = \{(s, s - t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ના નિયત ક્રિયાઓ (standard operations)થી પરિમાણ શોધો.

6. ઉકેલો : $x^2 \frac{dy}{dx} + xy + \sqrt{1 - x^2y^2} = 0$.

7. ઉકેલો : $(D^2 + 4)y = \sin 3x + e^x$, જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$.

8. ઉકેલો : $(D^2 - 2D + 4)\, y = e^x \cos x$, જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$.

9. $\log [(ax + b)(cx + d)]$નું nમું વિકલિત શોધો.

10. કિંમત શોધો : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1 + x)}$.

11. જો $y = e^{\tan^{-1}x}$, સાબિત કરો કે $(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n + 1)x - 1]y_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$.

12. કિંમત શોધો : $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$.

13. દ્વિસંકલની કિંમત શોધો : $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2)dydx$.

14. નીચેની શ્રેઢીનું અભિસરણ ચકાસો :

$$1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3!} + \frac{4^p}{4!} + \ldots..$$

15. માનાવકાશમાં કોશી શ્રેણી વ્યાખ્યાયિત કરો. માનાવકાશ પૂર્ણ માનાવકાશ ક્યારે કહેવાય છે ? પૂર્ણ માનાવકાશનું ઉદાહરણ આપો.

16. સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\ldots$ એ $\mathbb{R}$ પર એકરૂપ અભિસારી છે.

17. દર્શાવો કે વિધેય $f(z) = xy + iy$ એ $\mathbb{C}$ પર બધી જગ્યાએ સતત છે, પરંતુ તે Cમાં વૈશ્લેષિક (Analytic) નથી.

18. $\sqrt{4 + x}$ નું ટેઈલર વિસ્તરણ મેળવો. આ વિસ્તરણ ક્યાં માન્ય (valid) થશે ?

19. જો $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ પરનું સુરેખ વિધેય $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ હોય તો Tનો પ્રમાણિત શ્રેણિક (Standard Matrix) શોધો.

20. દર્શાવો કે જેમ (x, y) એ $(0, 0)$ને અનુલક્ષે ત્યારે $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ નું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

Adda247 UPSC

વિભાગ-B

સૂચના : (1) પ્રશ્ન ક્રમાંક : **21** થી **32**.
(2) બધા જ **12** પ્રશ્નોના જવાબો લખવાના છે.
(3) દરેક પ્રશ્નના **5** ગુણ છે.
(4) જવાબ આશરે **50** થી **60** શબ્દોમાં લખવા.

21. કોટ્યાંક-શૂન્યાંક પ્રમેય (Rank-nullity theorem) સમજાવો તથા તેને સુરેખ વિધેય

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, x - y, 0)$ માટે ચકાસો.

22. જો G કોઈ સમૂહ છે. તથા H તેનો ઘાત 2નો ઉપસમૂહ (subgroup of index 2) છે, તો સાબિત કરો કે H એ G નો નિશ્ચલ ઉપસમૂહ છે.

23. સાબિત કરો કે $a + b\sqrt{2}$ પ્રકારની સંખ્યાઓનો ગણ $I(\sqrt{2})$; જ્યાં a અને b પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય; એ સામાન્ય સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયાઓને સાપેક્ષ પૂર્ણ પ્રદેશ છે. (integral domain) શું તે ક્ષેત્ર (field) છે ?

24. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ ને ઉગમબિંદુ આગળ કૂદકા અસાતત્ય (Jump Discontinuity) છે.

25. માનાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. ધારો કે (X, d) કોઈ માનાવકાશ છે; તો $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ ને,

$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ $\forall x, y \in X$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે d_1 એ X પરનો માનક (metric) છે.

26. ઉકેલો : $(yz + z^2)\, dx - xz dy + xy dz = 0$.

27. $y = x^2$ અને $y = 2 - x^2$ની વચ્ચેનો પ્રદેશ રેખા $x = -2$ની આજુબાજુ પરિભ્રમણ કરે તો આ રીતે મળતા ઘન આકારનું ઘનફળ શોધો.

28. નીચેનું વિકલ સમીકરણ ઉકેલો :

$\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$.

29. લાગ્રાન્જના મધ્યકમાન પ્રમેય (mean value theorem)નો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે

$1 + x < e^x < 1 + xe^x \; \forall \; x > 0$.

30. સાબિત કરો કે શ્રેણી $\langle f_n \rangle$, જ્યાં $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$, $0 \le x < \infty$ $[0, \infty)$ પર 0 આગળ એકરૂપ અભિસારી છે. (Uniformly convergent to 0 on $[0, \infty)$)

31. સાબિત કરો કે $\mathbb{R}^3$ ના ત્રણ સદિશો (1, 1, –1), (2, –3, 5) અને (–2, 1, 4) એ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. (Linearly independent).

32. એક બિંદુ એક રેખા પર એવી રીતે ગતિ કરે છે કે રેખા પરના નિશ્ચિત બિંદુથી તેનું અંતર સમયના દ્વિઘાત વિધેયનું વર્ગમૂળ હોય. સાબિત કરો કે તેનો પ્રવેગ તે નિશ્ચિત બિંદુથી અંતરના ઘન સાથે વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

Adda247 UPSC

વિભાગ-C

સૂચના : (1) પ્રશ્ન ક્રમાંક : **33** થી **39**.
(2) નીચેના **7** પૈકી ગમે તે **5** પ્રશ્નોના જવાબો લખવાના છે.
(3) દરેક પ્રશ્નના **20** ગુણ છે.
(4) જવાબ આશરે **200** શબ્દોમાં લખવા.

33. એક a લંબાઈનો સમતલ સળિયો લીસી ઉભી દિવાલ પર l લંબાઈના તારની મદદથી લટકે છે. દોરીનો બીજો છેડો દીવાલના એક બિંદુ સાથે જોડાયેલો છે. દર્શાવો કે, આ સળિયો દિવાલ સાથે θ ખૂણે ટકેલો રહેશે; જ્યાં

$$\cos^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}.$$

ગુણોત્તર $a : l$ ની મર્યાદાઓ કઈ હશે કે જેથી સંતુલન સંભવ બને ?

34. છ એકસરખા સળિયા AB, BC, CD, DE, EF અને FA; પ્રત્યેકનું વજન W છે; તેમના છેડેથી એકબીજા સાથે ષટ્કોણ બને તે રીતે મુક્તપણે જોડાયેલા છે; જો સળિયો AB આડી સ્થિતિમાં (horizontal position) જોડેલો હોય તથા AB અને DEના મધ્યબિંદુઓ તારથી જોડાયેલા હોય તો; સાબિત કરો કે તેનો તનાવ (tension) 3W છે.

35. એક પરવલય કક્ષામાં (parabolic orbit) નાભિથી r અંતરે આવેલા બિંદુ પર, શિરોબિંદુથી પહોંચવા લાગતો સમય $\frac{1}{3\sqrt{\mu}}(r + l)\sqrt{2r - l}$ છે તેમ સાબિત કરો. જ્યાં $2l$ એ નાભિલંબની લંબાઈ છે.

36. 10 કક્ષાના ચક્રિય સમૂહ (cyclic group of order 10)ને કેટલા સર્જક (generators) હોય છે. ?

37. વ્યાખ્યા આપો (i) નિરપેક્ષ અભિસારી શ્રેઢી (ii) શરતી અભિસારી શ્રેઢી
સાબિત કરો કે $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ એ શરતી અભિસારી શ્રેઢી છે.

38. વિધેય $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ના ક્રાંતિ બિંદુઓ (Critical Points) શોધો, તથા તેમને સ્થાનિક મહત્તમ, ન્યૂનતમ અને નતિ બિંદુ તરીકે વર્ગીકૃત કરો.

39. ગ્રીનના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી રેખા સંકલ $\oint_C y^2\,dx + x^2 dy$ મેળવો; જ્યાં C એક બંધ વક્ર છે (closed curve) જે (0, 0), (1, 1) અને (1, 0) શિરોબિંદુઓ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશાના દિશામાનવાળા ત્રિકોણની સીમાઓ છે.

Subject Code : QDB-38

MATHEMATICS (Main Examination)

(English Medium)

Time : 3 Hours **Total Marks : 200**

Instructions :

(1) The question paper has been divided into three parts, **A**, **B** and **C**. The number of questions to be attempted and their marks are indicated in each part.

(2) Answers of all the questions of each part should be written continuously in the answer sheet and should not be mixed with other parts' Answer. In the event of answer found, which are belongs to other part, such answers will not be assessed by examiner.

(3) The candidate should write the answer within the limit of words prescribed in the parts **A**, **B** and **C**.

(4) If there is any difference in English language question and its Gujarati Translation, then English language question will be considered as valid.

(5) Answer should be written in one of the two languages. Write in the language (English or Gujarati) preference given by you. Answer should not be written in both the languages in the same paper.

Part-A

Instructions :

(1) Question No. **1** to **20**.

(2) Attempt all **20** questions.

(3) Each question carries **2** marks.

(4) Answer should be given approximately in **20** to **30** words.

1. Decompose the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ into transpositions.

2. Prove that if for every element a in a group G, $a^2 = e$, then G is an Abelian group.

3. Prove that the only idempotent elements of an integral domain with unity are 0 and 1.

4. If U is an ideal of a ring R with unity 1 and $1 \in U$, then prove that U = R.

5. Find the dimension of the subspace $W = \{(s, s - t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ of $\mathbb{R}^3$ with standard operations.

6. Solve : $x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy + \sqrt{1 - x^2y^2} = 0$.

7. Solve : $(D^2 + 4)y = \sin 3x + e^x$, where $D = \dfrac{d}{dx}$.

8. Solve : $(D^2 - 2D + 4)\, y = e^x \cos x$, where $D = \dfrac{d}{dx}$.

9. Find the n^{th} derivative of $\log [(ax + b)(cx + d)]$.

10. Evaluate $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1 + x)}$.

11. If $y = e^{\tan^{-1}x}$, prove that $(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n + 1)x - 1]y_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$.

12. Evaluate $\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$.

13. Evaluate the double integral : $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy dx$.

14. Test for convergence the following series : $1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3!} + \frac{4^p}{4!} + \cdots$

15. Define a Cauchy sequence in a metric space. When is a metric space said to be complete ? Give an example of a complete metric space.

16. Show that the series $\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.

17. Show that the function $f(z) = xy + iy$ is everywhere continuous but is not analytic in $\mathbb{C}$.

18. Find the Taylor series expansion of $\sqrt{4 + x}$. Where is the expansion valid ?

19. Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be the linear transformation given by $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Find the standard matrix of T.

20. Show that the function $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ has no limit as (x, y) approaches $(0, 0)$.

Adda247 UPSC

Part-B

Instructions : (1) Question No. **21** to **32**.

(2) Attempt all **12** questions.

(3) Each question carries **5** marks.

(4) Answer should be given approximately in **50** to **60** words.

21. State the rank-nullity theorem and verify it for the linear transformation

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x - y, x - y, 0).$$

22. If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G, prove that H is a normal subgroup of G.

23. Prove that set $I(\sqrt{2})$ of numbers of the form $a + b\sqrt{2}$, where a and b are integers is an integral domain with respect to ordinary addition and multiplication. Is it a field ?

24. Prove that the function $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ has a jump discontinuity at the origin.

25. Define a metric space. Let (X, d) be any metric space. Define $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ as,

$d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ $\forall x, y \in X$. Prove that d_1 is a metric on X.

26. Solve : $(yz + z^2)\, dx - xzdy + xydz = 0$.

27. The region bounded by $y = x^2$ and $y = 2 - x^2$ is revolved about the line $x = -2$. Find the volume of the solid generated.

28. Solve the following differential equation : $\dfrac{dy}{dx} - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$.

29. Use Lagrange's mean value theorem to prove that

$$1 + x < e^x < 1 + xe^x \quad \forall\, x > 0.$$

30. Prove that the sequence $\langle f_n \rangle$ defined by $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$, $0 \le x < \infty$ is uniformly convergent to 0 on $[0, \infty)$.

31. Prove that the three vectors (1, 1, –1), (2, –3, 5) and (–2, 1, 4) of $\mathbb{R}^3$ are linearly independent.

32. A point moves in a straight line so that its distance from a fixed point in that line is the square root of the quadratic function of the time. Prove that its acceleration varies inversely as the cube of the distance from the fixed point.

Adda247 UPSC

Part-C

Instructions : (1) Question No. **33** to **39**.

(2) Attempt any **5** out of **7** questions.

(3) Each question carries **20** marks.

(4) Answer should be given approximately in **200** words.

33. A uniform rod, of length *a* hangs against a smooth vertical wall being supported by means of a string, of length *l*, tied to one end of the rod, the other end of the string attached to a point in the wall. Show that the rod can rest inclined to the wall at an angle θ given by

$$\cos^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$$

What are the limits of the ratio of a : *l* that the equilibrium may be possible ?

34. Six equal rods AB, BC, CD, DE, EF and FA are each of weight W and are freely joined at their extremities so as to form a hexagon; the rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are joined by a string; Prove that its tension is 3W.

35. Prove that in a parabolic orbit the time taken to move from the vertex to a point distant r from the focus is $\frac{1}{3\sqrt{\mu}}(r + l)\sqrt{2r - l}$ where $2l$ is the length of latus rectum.

36. How many generators are there of the cyclic group of order 10 ?

37. Define (i) an absolutely convergent series (ii) a conditionally convergent series.
Prove that $\sum_{2}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$ is conditionally convergent.

38. Find the critical points and classify them as local maxima, minima and saddle points for the function $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$.

39. Use Green's theorem and evaluate the line integral $\oint_C y^2\, dx + x^2 dy$, where C is the closed curve which is the boundary of the triangle with vertices (0, 0), (1, 1) and (1, 0) with the counter clockwise orientation.

Adda247
UPSC